令和6年度前期日程入学試験問題 数学 D の解答例

以下は計算方法や論述の一例です。

1

(1) (与式)$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

(2) (i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x\cos x\ dx = \left[\frac{1}{6}\sin^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{48}$

(ii) $\displaystyle\int_1^2 x\cdot 2^{x-1}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x\cdot 2^x dx = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2^x}{\log 2}\cdot x\right]_1^2 - \frac{1}{\log 2}\int_1^2 2^x dx\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{8-2}{\log 2} - \frac{1}{(\log 2)^2}[2^x]_1^2\right)$

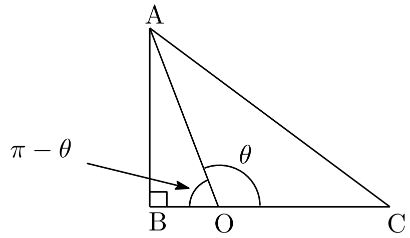
$\displaystyle = \frac{3}{\log 2} - \frac{2}{2(\log 2)^2} = \frac{3\log 2 - 1}{(\log 2)^2}$

(3) $\displaystyle f'(x) = \frac{(\log x)'\cdot x^3 - (\log x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{1-3\log x}{x^4} = \frac{-3\left(\log x - \frac{1}{3}\right)}{x^4}$ かつ対数関数 $\log x$ は区間 $x>0$ で増加するから, $\log x = \dfrac{1}{3}$ すなわち $x = \sqrt[3]{e}$ の前後で $f'(x)$ の符号が正から負に変化する。したがって, $x < \sqrt[3]{e}$ のとき $f(x)$ は増加, $x > \sqrt[3]{e}$ のとき $f(x)$ は減少し, $x = \sqrt[3]{e}$ のとき極大値 $f(\sqrt[3]{e}) = \dfrac{1}{3e}$ をとる。

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $m=2,\, n=-1$ のとき, $2m+3n=2\cdot 2+3\cdot(-1)=4-3=1$ が成り立つ。よって, $1\in A$ である。

(2)

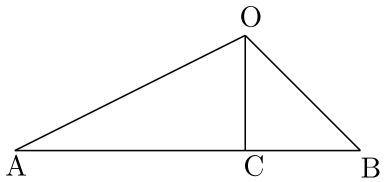


$\angle\mathrm{AOC}=\theta$ とおくと, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos(\pi-\theta)=\mathrm{BO}=2$ となる。よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta=-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos(\pi-\theta)=-5\cdot 2=-10$$

(3) (i) 「$x<-1$ または $x>2$」の否定は 「$x\geqq -1$ かつ $x\leqq 2$」であるから,
答えは $\overline{P}=\{x\mid -1\leqq x\leqq 2\}$ である。
(ii) $P\subset Q\iff \overline{Q}\subset\overline{P}$ であるから, $\overline{Q}\subset\overline{P}$ が成り立つように, k のとりうる値の範囲を考えればよい。(i) で述べたように, $\overline{P}$ は $-1\leqq x\leqq 2$ を満たす x の集合である。一方, $\overline{Q}$ は $x^2-(k+1)x+k=(x-1)(x-k)\leqq 0$ より, 1 と k の間 (1 と k の両方を含む) の数全体の集合である。したがって, 1 と k が閉区間 $[-1,2]$ に含まれることが必要十分で, 1 は含まれるから, $-1\leqq k\leqq 2$ が答えである。

$\boxed{\mathbf{3}}$



(1) 点 C は辺 AB を $2:1$ に内分するから, $\overrightarrow{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}$

(2) $1^2=|\overrightarrow{c}|^2=\left|\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}\right|^2=\dfrac{1}{9}|\overrightarrow{a}|^2+2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+\dfrac{4}{9}|\overrightarrow{b}|^2=\dfrac{5+8}{9}+\dfrac{4}{9}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})$ より, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-1$

(3) $\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}\right)\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})-\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{a}|^2+\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{b}|^2-\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a})=\dfrac{-1-5+4+2}{3}=0$

(4) (3) の結果より 辺 OC と辺 AB は垂直であり, 三角形 OCB は BC=OC$=1$ の直角二等辺三角形である. よって, $S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 1=\dfrac{3}{2}$ となる。

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) $|z|^7 = |z^7| = 1$ であり, $|z|$ は正の数であるから, $|z| = 1$。よって, $z\bar{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$ が成り立つ。

(2) $z^7 - 1 = (z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$ かつ $z \fallingdotseq 1$ より, $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$ となる。

(3) (1) の計算結果より, $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ が成り立つから, $z^6 = z^7 \cdot \dfrac{1}{z} = 1 \cdot \bar{z} = \bar{z}$

(4) (3) で得られた等式 $z^6 = \bar{z}$ の両辺を z で割った後に $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$ を利用すると, $z^5 = \dfrac{\bar{z}}{z} = \bar{z}^2$。同様にして, $z^4 = \bar{z}^3$ を得る。これら 3 つの関係式を (2) で得られた等式に代入すると,

$$\bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^3 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

となる。さらに, $z + \bar{z} = 2t$ を使えるように変形すると,

$$\begin{aligned}
&z^3 + \bar{z}^3 + z^2 + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1 = 0 \\
&(z+\bar{z})^3 - 3z\bar{z}(z+\bar{z}) + (z+\bar{z})^2 - 2z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 0 \\
&(2t)^3 - 3 \cdot 2t + (2t)^2 - 2 + 2t + 1 = 0 \\
&8t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0
\end{aligned}$$

を得る。よって, $2t^3 + t^2 - t = \dfrac{1}{4}$ となる。